EQUILIBRIO COMPETITIVO Y SOPORTES DEL CRECIMIENTO EN EL MODELO DE VON NEUMANN *

Pedro Uribe
UAM Iztapalapa y Universidad de Guadalajara

Resumen: Este artículo muestra que hay un equilibrio competitivo reproducible en el modelo general de crecimiento de Von Neumann, extendiendo así un resultado de Roemer.

Abstract: This paper shows the existence of a reproducible competitive equilibrium in the general Von Neumann growth model, extending in this way a result due to Roemer.

1. Introducción

Este artículo contiene un planteamiento, posiblemente incompleto, de un problema y la solución de un caso particular, que generaliza a uno considerado por J. Roemer (1981, capítulo I).

Entre los temas de interés en la microfundamentación de la teoría del crecimiento está la clase de trayectorias que se asocia a o que queda en alguna forma condicionada por posiciones sucesivas de equilibrio de mercado, sea éste competitivo o no. Visto en otra forma, ¿qué clase de trayectorias de crecimiento admite como precios soporte a un sistema dado de precios de mercado?

En este artículo se aborda el problema en forma indirecta: bajo qué condiciones un sistema de precios conocido como soporte de una trayectoria de crecimiento balanceado (y por tanto de una familia de trayectorias óptimas para varios criterios de optimalidad) es un sistema de precios de equilibrio, en este caso competitivo.

* Agradezco a Adalberto García Rocha y a Cario Benetti sus comentarios acerca de la ubicación del tema, que llevaron inclusive al cambio de título de este trabajo. Lucía A. Ruiz Galindo y un dictaminador anónimo observaron detalles oscuros en la versión original. Desde luego, los errores e impresiciones restantes son de mi entera responsabilidad.

J. Roemer (*op. cit.*) lo resuelve para un modelo con tecnología lineal de producción no conjunta y con demanda consistente en un 'consumo necesario' inelástico a los precios, por parte de consumidores trabajadores que aportan una fuerza de trabajo homogénea al proceso productivo. Dicho modelo no es otra cosa que el Marx-Leontief-Morishima; véase M. Morishima (1973).

En otros capítulos del mismo libro (precedido todo esto por un artículo en *Econometrica*, 1980) Roemer demuestra la existencia de equilibrio competitivo sin las restricciones de linealidad ni de producción no conjunta, en una economía a la Marx, donde la mano de obra homogénea tiene el mismo comportamiento, como consumidores, del modelo inicial. Previamente Morishima (1964) había demostrado la solubilidad de un modelo Von Neumann no lineal, donde la no linealidad se origina en elasticidades precio diferentes de cero por parte de los consumidores. Sin embargo, solamente Roemer aborda la relación equilibrio de mercado- trayectoria de crecimiento, introduciendo el concepto de 'equilibrio competitivo reproducible' y mostrando que, en el modelo específico del que se ocupa, los únicos precios de equilibrio competitivo reproducible son los de Von Neumann, *i.e.*, el sistema de soportes del crecimiento balanceado.

En este artículo se extiende el resultado de Roemer al modelo general de Von Neumann, con producción conjunta y trabajo heterogéneo manteniendo, para cada tipo de trabajo, la hipótesis de demanda inelástica a los precios. La demanda toma la forma de un haz de curvas de Engel que son rectas por el origen, cuyas distintas direcciones reflejan las diferentes composiciones (patrones de consumo) de los trabajadores de cada tipo (o de consumidores en general, cuyo trabajo aporta algo al proceso productivo).

La generalización consiste esencialmente en dos enunciados que valen bajo los supuestos de tecnología lineal Von Neumann y demanda inelástica a los precios, en un sistema económico (modelo de equilibrio general) *E*: *Para todo equilibrio Von Neumann asociado a la tecnología de E, existe un equilibrio competitivo cuyos precios son los de Von Neumann* (Teorema 2) *y: Para todo equilibrio competitivo de la economía E existe un factor de expansión de Von Neumann para el que los precios de equilibrio competitivo son de Von Neumann* (Teorema 3). La condición necesaria para la existencia de equilibrio competitivo reproducible que da Roemer en (1981) se traslada, *mutatis mutandis*, al modelo general.

La sección 2 es necesariamente un poco larga: consta en esencia de definiciones y de una lista de propiedades del modelo Von Neumann, que el lector familiarizado con el tema puede pasar por alto. Se definen, por una parte el modelo Von Neumann con trabajo heterogéneo, y por otra los conceptos de *equilibrio, regularidad, irreducibilidad y subtecnología.* Algunas demostraciones relativamente inmediatas se dan en las notas y, para el resto, se hace alusión a referencias en la literatura.

En la sección 3 se generalizan el concepto y los teoremas de existencia y unicidad de Roemer para modelos de equilibrio competitivo con tecnología Von Neumann irreducible y regular.

Como en una economía (o si se quiere tecnología) Von Neumann reducible, las subeconomías (subtecnologías) son irreducibles, el teorema se aplica a cada una de ellas. Las propiedades de la descomposición de una economía reducible hacen pensar que sería fructífero explorar la existencia y propiedades de equilibrios (no walrasianos) con oferta excedente y rigideces de precios, cuando la economía no se expande a tasa máxima. Esto, desde luego, es materia de estudio por separado.

2. Tecnologías Von Neumann con trabajo heterogéneo

Consideramos una tecnología lineal de producción de n bienes a partir de los mismos n bienes, esto es, una tecnología definida por un conjunto de posibilidades de producción $P \subset R_{+}^{2n}$ que es un *cono convexo poliédrico*.[1] Un punto de P es un *programa de producción* y su forma es: $(y', z')'$,[2] lo que quiere decir que el vector de productos $y \in R_{+}^{n}$ es *producible* a partir del vector de insumos z. El cono P está generado por (es el conjunto de combinaciones lineales no negativas) N *direcciones extremas*,[3] que se llamarán *actividades básicas*. Todo programa de producción en P es una combinación lineal no negativa de actividades básicas. Éstas son de la forma $\xi^j = (b^{j\,\prime}, q^{j\,\prime})'$, $j = 1, \ldots, N$. Todo programa de producción se puede expresar en la forma:

$$\left.\begin{aligned} y &= \sum_{j=1}^{N} x_j b^j \\ z &= \sum_{j=1}^{N} x_j q^j \end{aligned}\right\} \qquad (2.1)$$

para alguna colección de N escalares no negativos $x_1, \ldots, x_N$. Diremos que x_j es el *nivel* o la *escala* a la que opera la actividad básica j en la combinación

[1] El conjunto de posibilidades de producción de toda tecnología de rendimientos constantes a escala, es un cono convexo con vértice (en el origen). Si además de esto, el conjunto de posibilidades de producción es un poliedro, se tiene una tecnología lineal.

[2] El acento denota trasposición y los vectores se entienden como *columnas*.

[3] $\{\lambda x | \lambda \geq 0\}$ *es la dirección positiva* a través de x. El conjunto S de direcciones extremas de un cono convexo K se define por las propiedades: *i)* S genera a K, y *ii)* S es positivamente independiente (*i.e.*, ninguna de las direcciones en S es una combinación lineal *positiva* de las demás). Un cono es poliédrico (es a la vez un cono y un poliedro) si su conjunto de direcciones extremas es finito.

lineal de las actividades básicas que define al programa $(y', z')'$. Si $x \in \mathrm{R}_+^N$ es el vector de niveles de las actividades, B es la matriz de columnas b^j y Q la de columnas q^j, (2.1) se puede escribir en la forma:

$$y = Bx$$
$$z = Qx$$

y la *producción neta* de bienes es $y - z = (B - Q)\,x$. Diremos que b_{ij} es la cantidad de bien i que *produce* y q_{ij} la que *consume* la actividad j cuando su escala es la unidad.

Se entenderá como matriz *completa* de coeficientes técnicos, una matriz que incluye no solamente el uso directo de insumos en el proceso de producción, sino también el consumo de *bienes salario* por parte de los trabajadores, *i.e.*, la *reproducción de la fuerza de trabajo*.[4] La matriz Q es, por tanto, la suma de una matriz A de coeficientes técnicos 'ordinarios'(por ejemplo, como en insumo-producto) y una matriz de reproducción de la fuerza de trabajo. Se la define entonces como sigue: a escala unitaria, la actividad j usa

i) a_{ij} unidades de bien i como insumos (físicos).
ii) l_{kj} unidades (por ejemplo, jornadas) de trabajo de tipo k.

Un trabajador de tipo k consume $w_k c_{ik}$ unidades de bien i por jornada. El vector $c^k = (c_{ik})$ define *la composición* y el escalar w_k el *nivel* del consumo de los trabajadores de tipo k. w_k es una *tasa de salario real*: a precios p, el salario nominal por jornada de trabajo de tipo k es $W_k = w_k p'c^k$.

Convenimos en 'diagonalizar' un vector u como sigue: denotamos por $\hat{u}$ a la matriz diagonal de elementos (i, j): u_i si $i = j$, 0 si $i \neq j$. Dado todo esto, $q_{ij} = a_{ij} + \sum_k w_k l_{kj} c_{ik} = A + C\hat{w}L$, donde $\hat{w}$ es la diagonalización delvector w de tasas de salario real.

A precios p $(\in \mathrm{R}_+^n)$ la actividad j, a unidad de escala, produce bienes por valor (monetario) $\sum_i p_i b_{ij}$ y los consume por valor $\sum_i p_i q_{ij}$, de modo que el vector de ingresos netos de las actividades es $(B - Q)'p$.

La tecnología P queda totalmente identificada por las matrices B y Q. Diremos que la tecnología es la pareja (B,Q).

DEFINICIÓN 2.1. *i)* El escalar real $\alpha > 0$ es un *factor de expansión* viable para (B,Q) si existe un vector de niveles de actividad $x \geq 0$, tal que $(B - \alpha Q)x \geq 0$.[5]

[4] La consecuencia básica de utilizar este modelo es evitar el uso del trabajo como insumo primario. Véase el comentario que sigue a la Definición 2.4.

[5] $u \geq v$ denota $u_i \geq v_i$ para todo i; $u \geq v$ denota $u \geq v$ con $u \neq v$, *i.e.*, $u_i \geq v_i$ para todo i, con desigualdad estricta cuando menos para un i.

ii) El escalar real β es un *factor de rentabilidad* viable para (B,Q) si existe $p \geq 0$ tal que $(B-\beta Q)'p \leqq 0$.[6]

DEFINICIÓN 2.2. (x, p) es un *equilibrio Von Neumann con factor de expansión* α y factor de rentabilidad β para (B,Q) si :

$$(B-\alpha Q)x \geqq 0 \,, \tag{2.2.a}$$

$$(B-\beta Q)'p \leqq 0 \,, \tag{2.2.b}$$

$$p'(B-\alpha Q)x = p'(B-\beta Q)x = 0 \,. \tag{2.2.c}$$

Se dice que una pareja de equilibrio (x, p) es de *equilibrio económico* si, además de (2.2), satisface que $p'Bx > 0$ (valor positivo de la producción).

PROPOSICIÓN 2.1. *Si (x, p) es una pareja de equilibrio económico con factor de expansión α y factor de rentabilidad β, ambos diferentes de cero, entonces $\alpha = \beta$*.[7]

Si (x, p) es de equilibrio económico de factor de expansión α, diremos que (x, p, α) es un equilibrio Von Neumann de nivel α si:

$$(B-\alpha Q)x \geqq 0 \,, \tag{2.3.a}$$

$$(B-\alpha Q)'p \leqq 0 \,. \tag{2.3.b}$$

La ecuación $p'(B-\alpha Q)x = 0$ es consecuencia de (2.3.a, b).

Se dirá que el bien i *se sobreproduce a nivel* α si $[(B-\alpha Q)x]_i > 0$ para x solución de (2.3.a), y que la actividad j *es ineficiente a nivel* α si, para p solución de (2.3.b), $[(B-\alpha Q)'p]_j < 0$. La condición de ortogonalidad $p'(B-\alpha Q)x$ implica que, en equilibrio, los bienes sobreproducidos son libres ($p_i = 0$) y las actividades ineficientes no se usan ($x_j = 0$).

[6] $(B-\alpha Q)x \geqq 0$ implica que $\alpha \leq \alpha_i(x) = (Bx)_i \,/\, (Qx)_i$ para todo i. Sea $\alpha(x)$ el mínimo sobre i de las $\alpha_i(x)$. Un factor de expansión *uniforme* mayor que $\alpha(x)$ no es alcanzable con niveles de actividad x; uno menor está dominado por $\alpha(x)$ y es ineficiente. En forma semejante, $(B-\beta Q)'p \leqq 0$ implica que, para todo j, $\beta \leq \beta_j(p) = (B'p)_j \,/\, (Q'p)_j$. Si $\beta^* < \beta(p) = \min_j \beta_j(p)$, $(B-\beta^* Q)'p$ tiene coordenadas positivas, lo que viola (2.2.b). En términos económicos, se dan ganancias extraordinarias a precios p. Un factor de rentabilidad uniforme mayor que $\beta(p)$ no es alcanzable a precios p.

[7] Si $p'Bx > 0$ y tanto α como β son diferentes de cero, $p'Qx$ tampoco es cero y la división entre $p'Qx$ es factible. $\alpha = \beta$ es consecuencia trivial de (2.2.c).

DEFINICIÓN 2.3. El conjunto de *vectores factibles* (de escalas) *de actividad a nivel* α se denotará por $E(\alpha)$. Está claro que $E(\alpha) = \{ x \in R_+^N \mid (B - \alpha Q)x \geqq 0 \}$. El conjunto de *sistemas de precios factibles a nivel* α es

$$F(\alpha) = \{ p \in R_+^n \mid (B - \alpha Q)'p \leqq 0 \} .$$

La siguiente proposición es inmediata:

PROPOSICIÓN 2.2. *Para todo* α, $E(\alpha)$ *y* $F(\alpha)$ *son conos convexos con vértice en el origen.*

DEFINICIÓN 2.4. La tecnología (B,Q) es *regular* si ninguna columna de Q y ningún renglón de B son cero.

Esto quiere decir que: 1) todas las actividades básicas usan algún insumo y 2) la tecnología (B,Q) no usa insumos primarios.

El lector nota que la incorporación del trabajo en la matriz completa evita considerarlo como insumo primario, a diferencia de los modelos neoclásicos y neo-ricardianos. Esto es importante en virtud de la siguiente Proposición.

PROPOSICIÓN 2.3. *Si* (B,Q) *es regular,* $\{ \alpha \mid E(\alpha) \neq \varnothing \}$ *está acotado por arriba y* $\{ \alpha \mid F(\alpha) \neq \varnothing \} \subset R_+ \setminus \{ 0 \}$.

DEMOSTRACIÓN. Véase Brómek (1974).

En lo que sigue $I = \{ 1, \ldots , n \}$ y $J = \{ 1, \ldots , N \}$. Si $I' \subset I$ y $J' \subset J$, la submatriz de A con índices de renglón en I' e índices de columna en J' se denotará por $A_{|I' \times J'}$.

La siguiente definición se usará para extender al modelo rectangular el concepto de matriz reducible, familiar en el caso de matrices cuadradas.[8]

DEFINICIÓN 2.5. $I_1 \subset I$ es un *conjunto independiente de bienes* si existe $J_1 \subset J$ tal que $B_{|I_1 \times J_1} \geq 0$, pero $Q_{|(I \setminus I_1) \times J_1} = 0$.

Los bienes de un conjunto independiente se pueden producir usando solamente actividades de un cierto subconjunto J_1 (usando solamente bienes del mismo conjunto como insumos, en el caso de un modelo cuadrado).

[8] La irreducibilidad de la matriz de coeficientes técnicos es básica en el estudio de modelos cuadrados, en particular para las aplicaciones del teorema de Perron y Frobenius. Sraffa (1960) y la escuela neo-ricardiana la explotan para el concepto de *bienes básicos*. Véase un tratamiento detallado en Pasinetti (1975).

Si existe un conjunto independiente de bienes, la forma de Q es la siguiente:

$$\begin{array}{cc} Q = \left[\begin{array}{cc} Q_{11} & Q_{12} \\ 0 & Q_{22} \end{array}\right] & \begin{array}{l} I_1 \\ I\setminus I_1 \end{array} \\ \quad\;\; \begin{array}{cc} J_1 & J\setminus J_1 \end{array} & \end{array}$$

y se puede demostrar que la de B es la misma. Si Q es cuadrada existe un conjunto independiente de bienes si y solamente si Q es una matriz reducible.

DEFINICIÓN 2.6. (B,Q) es *irreducible* si no tiene conjuntos independientes de bienes.

PROPOSICIÓN 2.4. (Gale, 1960). *Si (B,Q) es irreducible y $x \in E(\alpha)$ para $\alpha > 0$, entonces $Bx > 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Véase Takayama (1974).

COROLARIO. *Si (B,Q) es irreducible, todos sus equilibrios no triviales ($x \neq 0$, $p \neq 0$), son económicos.*

$(B,Q)|_{I\setminus I_1 \times J\setminus J_1} = (B_{22}, Q_{22})$ es una *subtecnología* de (B,Q). Si es a su vez reducible, tiene una subtecnología, que es subtecnología de *segundo orden* de (B,Q), etc.

DEFINICIÓN 2.7. $\bar{\alpha} = \sup \{ \alpha \mid E(\alpha) \neq \varnothing \}$ es el *factor de expansión de Von Neumann* de (B,Q).

$\bar{\alpha}$ es el máximo α para el que existen soluciones a (2.3.a), *i.e.*, el máximo factor al que puede expandirse (B,Q).

Para $x \in \mathrm{R}^n_+$, $\sigma(x)$ denotará al conjunto de coordenadas positivas de x: $\sigma(x) = \{ j \mid x_j > 0 \}$.

PROPOSICIÓN 2.5. *Si $S \subset \mathrm{R}^n_+$ es convexo, existe $x \in S$ tal que, para todo $y \in S$, $\sigma(y) \subset \sigma(x)$.*[9]

[9] La demostración es prácticamente trivial: para $\lambda \in (0,1)$, $\lambda x + (1-\lambda)y$ tiene como coordenadas positivas tanto las de x como las de y; como hay solamente n de ellas, después de un número finito de combinaciones convexas se tiene un vector de S al que ya no pueden añadirse nuevas coordenadas positivas.

DEFINICIÓN 2.8. Un $x \in S$ que satisface la propiedad de la Proposición 2.5 es un σ – *maximal* en S.

3. Equilibrio competitivo con producción conjunta

La *economía* objeto de estudio en esta sección consta de: *i*) un conjunto de productores (empresas) $M = \{ 1, \ldots, m \}$, cada uno con una dotación inicial de bienes utilizables como insumos, y *ii*) una tecnología Von Neumann regular e irreducible (B,Q).

Denotamos a la economía por $E = (M,(B,Q),\{ \bar{y}^k \mid k \in M \})$, donde M es el conjunto de productores, $\bar{y}^k$ es la *dotación inicial* de bienes del productor k y (B,Q) es la tecnología.

Supondremos que tanto p como x son puntos del simplex estándar Δ^r, r la dimensión apropiada.

DEFINICIÓN 3.1. El conjunto $K(B,Q) = \{ u \in \mathrm{R}^n_+ \mid \exists\, x \in \Delta^{N-1} \ni Bx \geq Qx = u \}$ es el *cono de Roemer* de la tecnología (B,Q).[10]

El cono de Roemer de (B,Q) contiene a vectores de bienes u que, de usarse como insumos, permiten una producción cuando menos igual a u, coordenada por coordenada. Esto es, son *reproducibles* por la tecnología (B,Q); véase Definición 3.5 más adelante.

DEFINICIÓN 3.2. La correspondencia[11] $G : \Delta^{n-1} \times \mathrm{R}^n_+ \multimap \Delta^{N-1}$ del producto del espacio de precios por el de bienes al espacio de niveles de actividad, con imágenes $G(p,\bar{y}^k) = \{ x \in \Delta^{N-1} \mid p'(Qx - \bar{y}^k) \leq 0 \}$ es la *correspondencia de presupuesto* de un productor con dotación inicial $\bar{y}^k$.

La imagen del punto $(p,\bar{y}^k)$ bajo la correspondencia de presupuesto, contiene a todos los vectores de niveles de actividad que, de usarse, hacen que el costo de los insumos (costo de producción) a precios p no exceda al valor de la dotación inicial $\bar{y}^k$, evaluada a los mismos precios.

[10] $\exists$ denota al cuantificador existencial y '$\ni$' se lee *'tal que'*.

[11] Para un espacio vectorial X, X^* denota a su dual (el espacio de las funcionales lineales sobre X). Cuando se trate de correspondencias (funciones de puntos a conjuntos), en lugar de $f : X \rightarrow Y$ escribiremos $f : X \multimap Y$. Está claro que, si f es función, $f(x) \in Y$; si f es correspondencia, $f(x) \subset Y$.

DEFINICIÓN 3.3. La correspondencia $\xi_k : \Delta^{n-1} \times R^n_+ \multimap \Delta^{N-1}$, de imágenes $\xi(p,\bar{y}^k) = \{ x \in G(p,\bar{y}^k) \mid z \in G(p,\bar{y}^k) \Rightarrow p'(B-Q)x \geq p'(B-Q)z \}$ es la *correspondencia de niveles óptimos de actividad para un productor con dotación inicial* $\bar{y}^k$.

Desde luego, $\xi(p,\bar{y}^k) \subset \partial G(p,\bar{y}^k)$, la frontera de $G(p,\bar{y}^k)$, *i.e.*, un productor que maximiza ganancias usa totalmente el valor de su dotación inicial.

DEFINICIÓN 3.4. $\{ y^k \mid k \in M \}$ es una *asignación* (de producción).

DEFINICIÓN 3.5. *a*) $(p,\{ y^k \mid k \in M \})$ es un *equilibrio competitivo estático* de la economía $E = (M, (B,Q), \{ \bar{y}^k, k \in M \})$ si $p \geq 0$ y:

i) Para todo k, $y^k = Bx^k$ para algún $x^k \in \xi(p,\bar{y}^k)$.

ii) $\sum_{k \in M} y^k = \sum_{k \in M} \bar{y}^k$.

b) $(p, \{ y^k \mid k \in M \})$ es un *equilibrio competitivo reproducible* de la economía E si vale *i*) y, en lugar de *ii*) se cumple:

ii') $\sum_{k \in M} y^k \geqq \alpha \sum_{k \in M} \bar{y}^k$ para algún $\alpha > 1$.

Si $(p,\{ y^k \mid k \in M \})$ es un equilibrio (competitivo, reproducible), $\{ y^k \mid k \in M \}$ es una *asignación de equilibrio (competitivo, reproducible)*.

Un equilibrio estático es un equilibrio reproducible con $\alpha = 1$. Se dice que α es un *factor de expansión* asociado al equilibrio $(p,\{ y^k \mid k \in M \})$.

Sea $\bar{y} = \sum_{k \in M} \bar{y}^k$ la dotación inicial *agregada* de los productores; definimos la correspondencia agregada de presupuesto $G(p,\bar{y}) = \sum_{k \in M} G(p,\bar{y}^k)$ y la correspondencia agregada de niveles óptimos de actividad $\xi(p,\bar{y}) = \sum_{k \in M} \xi(p,\bar{y}^k)$.

Diremos que $x \in \xi(p,\bar{y})$ es un *vector de niveles agregados de actividad de equilibrio* si $Bx \geq \sum_{k \in N} \bar{y}^k$.

LEMA 1. *Si p es σ – maximal en $F(\alpha)$ y (B,Q) es regular e irreducible, $Q'p > 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Si para algún j, $(Q'p)_j = 0$, $p_i = 0$ si $q_{ij} > 0$. Por la σ–maximalidad de p y la irreducibilidad de (B,Q), $Q^j = 0$, contradiciendo el supuesto de regularidad. ■

LEMA 2. *Bajo los supuestos del Lema anterior,*

$$\max_{x \in \Delta^{N-1}} (p'Bx)/(p'Qx) = \max_j \frac{(B'p)_j}{(Q'p)_j}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $\alpha_j(p) = (B'p)_j / (Q'p)_j$ y $\alpha(p) = \max_j a_j(p)$. Sea h una actividad que maximiza $\alpha_j(p)$ (h depende de p, obviamente). Si $j \neq h$, $\alpha_j(p) < \alpha_h(p) = \alpha(p)$ y x es un maximizador, $x_j = 0$. Supóngase lo contrario y sean: x^0 un $x \in A^{N-1}$ tal que $x_j^0 > 0$ si y solamente si

$$\alpha_j(p) = \alpha(p), \quad J' = \{ j \mid x_j(p) > 0 \wedge \alpha_j(p) < \alpha(p) \}$$

y, finalmente, $\varepsilon_j = \alpha_j(p) - \alpha(p)$ para $j \in J'$.

$$\frac{p'(B-Q)x}{p'Qx} = \frac{p'(B-Q)x^0}{p'Qx^0} + \sum_{j \in J'} x_j \varepsilon_j < \alpha(p) - 1,$$

de modo que x no es un maximizador. ■

TEOREMA 1. *Bajo los supuestos de los dos Lemas:*

i) $(p, \{ y^k \})$, $y^k = Bx^k$, *es un equilibrio competitivo reproducible con factor de expansión* $\alpha(p)$ *de la economía* $E = (M, (B,Q), \{ \bar{y}^k \})$ *solamente si para todo* k, $x^k > 0$ *si y solamente si* $\alpha_j(p) = \alpha(p)$.

ii) Existe al menos un $x \in E(\alpha(p))$ *tal que* $x_j > 0$ *para todo* j, *tal que* $\alpha_j(p) = \alpha(p)$.

DEMOSTRACIÓN. *i)* Sean $\{ y^k \} = \{ Bx^k \}$ una asignación tal que $x = \sum_k x^k$. Por el Lema 2, si $x_j^k > 0$ para algún k, para algún j con $\alpha_j(p) < \alpha(p)$, $x^k \notin \xi(p, \bar{y}^k)$.

ii) Por las Proposiciones 2 y 5 de la sección 2, $x = \sum_k x^k$ puede tomarse como un σ – maximal en $E(\alpha(p))$. ■

COROLARIO 1. *En una economía irreducible, si p es de equilibrio competitivo reproducible,* $(B - \alpha(p)Q)'p = 0$.

TEOREMA 2. *Si* (x^0, p^0) *es un equilibrio Von Neumann de nivel* $\bar{\alpha} > 1$ *de la tecnología regular irreducible* (B,Q), *existe un equilibrio competitivo reproducible* $e = (p^0, \{ y^k \})$ *de la economía* $E = (N, (B,Q), \{ \bar{y}^k \})$, *con* $\sum_k \bar{y}^k = \bar{y} = Qx^0$, *y existen* $x^k \in \xi(p, \bar{y}^k)$, *tales que* $x^0 = \sum_k x^k$, $y^k = Bx^k$ *para todo k.*

DEMOSTRACIÓN. Si (B,Q) es irreducible se pueden tomar $x^0 > 0$, $p^0 > 0$, de modo que $G(p^0, \bar{y})$ es compacto y $p^{0\prime}(B - Q)x$ alcanza un máximo en la frontera de $G(p^0, \bar{y})$. Sea $\bar{x}$ el maximizador. Por el Lema 2, $p^{0\prime}(B - Q)\bar{x} = (\alpha(p^0) - 1)\, p^{0\prime}\bar{y} = (\alpha(p^0) - 1)p^{0\prime}Qx^0$. Pero, por definición de equilibrio Von Neumann, $\bar{\alpha}p^{0\prime}Qx^0 = p^{0\prime}Bx^0$, *i.e.*, $p^{0\prime}(B - Q)\bar{x} = p^{0\prime}(B - Q)x^0$, o sea que $\bar{\alpha} = \alpha(p^0)$ y x^0 es un maximizador. Como $x^0 \in \xi(p^0, Qx^0) = \xi(p^0, \sum_k \bar{y}^k)$, x^0

se descompone en la forma $\sum_k x^k$, con $Qx^k = \bar{y}^k$ para todo k. Obviamente, $(p^0, \{Bx^k\})$ es un equilibrio competitivo reproducible de la economía E. ■

Si $\bar{\alpha} \leq 1$, el equilibrio $(p^0, \{y^k\})$ sigue siendo competitivo, pero la economía E no es capaz de crecer, *independientemente de las dotaciones iniciales*: su tecnología no lo permite.

TEOREMA 3. *Supóngase que la economía* $E = (N, (B,Q), \{\bar{y}^k\})$ *con* (B,Q) *regular, posee un equilibrio competitivo* $(p, \{y^k\})$, *con* $y^k = Bx^k$ *para todo* k. *Sea* $x = \sum_k x^k$. *Entonces existe* $\alpha > 0$ *tal que* $(B - \alpha Q)'p \leq 0$ *y* $p'(B - \alpha Q)x = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Por regularidad, las funciones $\alpha_j(p)$ y $\alpha(p)$ del Teorema 1 están bien definidas. Por definición de la función $\alpha(p)$, $(B - \alpha(p)Q)'p \leq 0$. Como $x \geq 0$, $p'(B - \alpha(p)Q)x \leq 0$. Sin pérdida de generalidad, x puede suponerse α- maximal en $E(\alpha)$ y entonces, si la desigualdad fuera estricta, existiría $j \in \sigma(x)$ tal que $[(B - \alpha(p)Q)'p]_j < 0$. Por el Teorema 1, x no es de equilibrio. ■

TEOREMA 4. (*Condición de accesibilidad*) *Sea* (B,Q) *regular e irreducible. Si y solamente si* $\bar{y} \in K(B,Q)$ *existe un equilibrio competitivo de la economía E con precios positivos, tal que* $\frac{p'Bx}{p'Qx} \geq 1$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\bar{y} \in K(B,Q)$. Entonces, para todo $p > 0$ el máximo de $p'(B - Q)x$ para $x \in G(p, \bar{y})$ existe y es no negativo. Sean x^0 el maximizador y $\alpha(p)$ la función definida en los teoremas anteriores. $p'(B - Q)x^0 = (\alpha(p) - 1)p'\bar{y} \geq 0$, de donde $\alpha(p) \geq 1$. Como $p'\bar{y} = p'Qx^0$, se concluye que $\frac{p'Bx^0}{p'Qx^0} \geq 1$. Desde luego, $x^0 \in \xi(p, \bar{y})$, de modo que existen $x^k \in \xi(p, \bar{y}^k)$ tales que $(p, \{Bx^k\})$ es equilibrio competitivo de la economía E.

Recíprocamente, si $(p, \{\bar{y}^k\})$, es un equilibrio competitivo de la economía E con p positivo, existen $x^k \in \xi(p, \bar{y}^k)$, tales que $p'Qx^k = p'\bar{y}^k$ para cada k, de modo que $p'(Qx - \bar{y}) = 0$ y $p > 0$ implica $Qx = \bar{y}$. ■

Este es el sentido en el que la trayectoria de crecimiento balanceado es 'alcanzable' desde las dotaciones iniciales de los productores: la dotación inicial agregada es un punto del cono de Roemer de la tecnología.

4. Conclusiones y algunas conjeturas

Se ha extendido el análisis de J. Roemer (1981) que muestra, por una parte, que el modelo Morishima del esquema de reproducción ampliada de Marx es un modelo de equilibrio general, donde los consumidores son los trabajadores, con demanda inelástica a los precios y, por otra, que los precios soporte del crecimiento balanceado y los precios de equilibrio competitivo en este modelo son los mismos. La generalización objeto de este artículo ha consistido en mostrar que el resultado de Roemer continúa siendo válido, con ligeras modificaciones en su enunciado, si se admiten producción conjunta y trabajo heterogéneo.

Si el consumo de un trabajador de tipo k tiene una parte $w_k c^k$ que no depende de los precios y otra $f^k(p)$ que depende explícitamente de ellos, Q toma la forma $Q = A + [C\hat{w} + F(p)]L$, donde $F(p)$ es la matriz de columnas $f^k(p)$. Si $Q'p$ es una función homogénea de primer grado en p, los precios de Von Neumann en el caso de producción simple (*i.e.*, $Q : R^n_+ \rightarrow R^n_+$ es un operador homogéneo) están definidos en forma semejante a los del caso lineal, como el vector característico asociado a la raíz de Frobenius de Q; véase por ejemplo Morishima (1964), Fujimoto (1979), Bath (1986). Para el modelo de este artículo, cuya tecnología admite producción conjunta, es concebible la generalización no lineal en la línea de Idzik (1979) para modelos Von Neumann no lineales; y en la de Mangasarian (1971) y Thompson y Weil (1971) para la idea de los equilibrios Von Neumann como parejas duales de vectores característicos (generalizados) de haces rectangulares. Este trabajo está por desarrollarse.

Se puede adelantar una conjetura: los precios de equilibrio de producción son de equilibrio competitivo si: *i) la tecnología es de rendimientos constantes a escala, y ii) las funciones demanda de los consumidores son homogéneas de grado cero en los precios relativos.* En el caso cuadrado ésta es la condición para que $Q(p)$ sea un operador homogéneo y valga la generalización Morishima-Fujimoto-Bath, del teorema de Perron-Frobenius. Es posible que sea la misma condición la que permita la generalización al caso no lineal del enfoque de Mangasarian y de Thompson-Weil *via* vectores característicos de haces rectangulares.

Nótese que, si la conjetura es válida, no tiene sentido seguir hablando de equilibrio competitivo en el caso de que la condición *i)* se viole: se está en el caso de un equilibrio monopólico del tipo Negishi-Silvestre,[12] en el que sería difícil sostener la idea de un equilibrio de producción' y de los soportes de la trayectoria de crecimiento balanceado, independiente de la forma de organización del mercado.

Otro campo de interés para investigación futura surge de que, al utilizar el modelo de Von Neumann para dar cuenta de la producción conjunta, se vislumbran nuevas extensiones, en particular la búsqueda de equilibrios no walrasianos en sistemas con tecnología reducible. En efecto, si el sistema opera a una tasa de reproducción menor que la de su subsistema más eficiente,

[12] Negishi (1972); Silvestre (1978).

los bienes producidos por éste tienen oferta excedente y por tanto precios de equilibrio cero o libre eliminación de la oferta excedente. Como el sistema no opera necesariamente a su tasa máxima de expansión (decisión política de producir ciertos bienes no básicos o de utilizar ciertas actividades ineficientes a tasa máxima, por ejemplo), tiene sentido estudiar los equilibrios con racionamiento y con rigideces en los precios (no necesariamente precios fijos).

Referencias

Bath, K. (1986). "On Non-Linear Extensions of the Perron-Frobenius Theorem", *Journal of Mathematical Economics*, vol. 15, pp. 59-82.

Brómek, T. (1974). "Equilibrium Levels in Decomposable Von Neumann Models", en J. y M. Los (comps.), *Mathematical Models in Economics*, Amsterdam, North Holland, pp. 35-46.

Fujimoto, T. (1979). "Nonlinear Generalization of the Frobenius Theorem: A Symmetric Approach", *Journal of Mathematical Economics*, vol. 6, pp. 17-21.

Gale, D. (1960). *Theory of Linear Economic Models*, Nueva York, Mc Graw Hill.

Idzik, A. (1979). "Farkas Lemma for Concave-Convex Functions with an Application to the Nonlinear Von Neumann Model", en M. Aoki y A. Marzollo (comps.), *New Trends in Dynamic System Theory and Economics*, Nueva York, Academic Press.

Mangasarian, O. L. (1971). "Perron-Frobenius Properties of Ax-λBx", Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 36, pp. 86-102.

Morishima, M. (1964). Equilibrium, Stability and Growth, Cambridge University Press.

——— (1973). Marx's Economics: A Dual Theory of Value and Growth, Cambridge University Press.

Negishi, T. (1972). *General Equilibrium Theory and Internatiomal Trade*, Amsterdam, North Holland.

Pasinetti, L. (1975). *Lezioni di Teoria delta Produzione*, Bologna, Il Mulino.

Roemer, J. (1980). "A General Equilibrium Approach to Marxian Economics", *Econometrica*, vol. 48, pp. 505-530.

——— (1981). *Analytical Foundations of Marxian Economic Theory*, Nueva York, Academic Press.

Silvestre, J. (1978). "Increasing Returns in General Non-Competitive Analysis", *Econometrica*, vol. 46, pp. 397-402.

Sraffa, P. (1960). *Production of Commodities by Means of Commodities*, Cambridge University Press.

Takayama, A. (1974). *Mathematical Economics*, Homewood, Ill., The Dryden Press.

Thompson, G. L., y R. L. Weil (1971). "Von Neumann Model Solutions are Generalized Eigensystems", en J. Bruckman y W. Weber (comps.), *Contributions to the Von Neumann Growth Model*, Viena, Springer Verlag, pp. 139-154.